Convergence d'une série de Fourier

(Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, 1822)

Dr Guy-Bart STAN

14 Mai 2009

Sommaire

Prérequis

- Notions de base en analyse fonctionnelle (fonction continue par morceaux, intégrale et intégrabilité au sens de Riemann, Théorème de Riemann-Lebesgue)
- Notions de base sur les nombres complexes (en pariculier, propriétés de l'exponentielle complexe)
- Définitions d'une suite, définition d'une série, définitions de la convergence ponctuelle et de la convergence uniforme

Définition du problème

*Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-**périodique** $(f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R})$ et **intégrable (au sens de Riemann) sur tout intervalle borné.***

Définition (Définition du problème)

Sous quelles conditions $f(x)$ peut-elle être décomposée en une série du type

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall n$$

ou, de façon équivalente[1], en une série du type

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n \in \mathbb{C}, \forall n\,?$$

---

1. $\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$ $\Rightarrow$ $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, $n \in \mathbb{N}_+$.

Coefficients de Fourier

Les coefficients a_n, b_n et c_n sont appelés *coefficients de Fourier* de $f(\cdot)$ et sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos(n\psi)\ d\psi,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin(n\psi)\ d\psi, \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in\psi}\, d\psi \quad (2)$$

(Ces intégrales existent vu que $f(\cdot)$ est supposée être intégrable (au sens de Riemann) sur tout borné.)

Sommes partielles

Définition (Somme partielle d'indice N)

$$S_N^f(x) \triangleq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

où a_n, b_n et c_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(\cdot)$ (voir (1) et (2)).

Le problème posé peut donc s'énoncer :

> *Sous quelles conditions la série* $\lim_{N\to\infty} S_N^f(x)$ *converge-t-elle ? vers* $f(x)$ *?*

Types de convergences

Plusieurs types de convergence peuvent être considérés. Par exemple :

- ***conv. ponctuelle (ou simple)***, (Lejeune Dirichlet, 1824) (Dirichlet, $S_N^f(x) - f(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0, \forall x \in [-\pi, \pi]$)
- ***conv. uniforme*** ($\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left|S_N^f(x) - f(x)\right| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$)
- ***conv. en norme*** (e.g., $S_N^f \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans $\mathcal{L}_p$: $\int_{-\pi}^{\pi} \left|S_N^f(\phi) - f(\phi)\right|^p d\phi \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$)
- ***conv. presque partout*** (Lennart Carleson, 1964)

Chacune de ces notions de convergence requiert des hypothèses différentes sur la fonction $f(\cdot)$, ainsi que différents types de preuves (dont certaines nécessitent des notions d'analyse fonctionnelle (très) avancées).
Dans cet exposé, nous allons nous concentrer sur l'une des convergences les plus simples : la *convergence ponctuelle*.

Convergence ponctuelle (Théorème de Dirichlet)

Théorème (Dirichlet, 1824)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* 2π*-périodique et "lisse par morceaux" sur* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(x_-\right) + f\left(x_+\right)\right), \quad f\left(x_\pm\right) = \lim_{h\to 0,\, h>0} f(x \pm h)$$

pour tout x*. En particulier,* $\lim_{N\to\infty} S_N^f(x) = f(x)$ *pour tout* x *où* $f(\cdot)$ *est continue.*

Illustration

Hypothèses du Théorème de Dirichlet

Définition (Fonction lisse par morceaux)

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est "**lisse par morceaux**" **sur** $[a, b]$ si $f(\cdot)$ **et** $f'(\cdot)$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$. En particulier, $f'(a_+)$ et $f'(b_-)$ existent.

Définition (Fonction continue par morceaux)

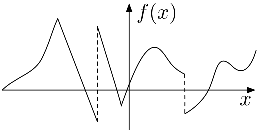
Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est "**continue par morceaux**" **sur** $[a, b]$ si

1. f est continue sur $[a, b]$ sauf évent. en un nb fini de pts $x_1, \dots, x_k$;
2. en chacun des points $x_1, \dots, x_k$ les limites à g. et à d. de f existent : $f(x_{j-}) = \lim_{h\to 0,\, h>0} f(x_j - h)$ (lim g.) et $f(x_{j+}) = \lim_{h\to 0,\, h>0} f(x_j + h)$ (lim d.), $j = 1, \dots, k$. En particulier, $f(a_+)$ et $f(b_-)$ existent.

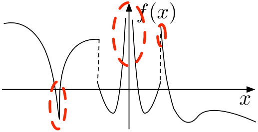
Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue (resp. lisse) par morceaux **sur** $\mathbb{R}$ si elle est continue (resp. lisse) par morceaux sur tout intervalle borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Exemple de fonction lisse par morceaux



Exemple de fonction non lisse par morceaux



Preuve du Théorème de Dirichlet (1)

Démonstration.

1. (Exercice 1) $S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\phi)D_N(\phi)\,d\phi$ (produit de convolution) avec $D_N(\phi) \triangleq \sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi}$ (appelé "*noyau de Dirichlet*" d'indice N)
2. (Exercice 2) $D_N(\phi) = \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi}-1} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$, $\phi \neq 0$; $D_N(0) = 2N+1$
3. (Exercice 3) $\forall N$: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2}$

Utilisant 3., on a :
$\frac{1}{2}f(x_-) = \frac{f(x_-)}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\,d\phi$, et $\frac{1}{2}f(x_+) = \frac{f(x_+)}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(\phi)\,d\phi$.
Dès lors, par 1., on obtient :

$$\begin{aligned}
&S_N^f(x) - \frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right) \\
= &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \left(f(x+\phi) - f(x_-)\right) D_N(\phi)\,d\phi \\
+ &\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(f(x+\phi) - f(x_+)\right) D_N(\phi)\,d\phi
\end{aligned}$$

$\square$

Preuve du Théorème de Dirichlet (2)

Démonstration.

Utilisant 2., on obtient :

$$S_N^f(x) - \frac{1}{2}\left(f\left(x_-\right) + f\left(x_+\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\left(e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}\right)\,d\phi$$

avec $g(\phi) \triangleq \begin{cases} \frac{f(x+\phi)-f(x_-)}{e^{i\phi}-1}, & -\pi \leq \phi < 0 \\ \frac{f(x+\phi)-f(x_+)}{e^{i\phi}-1}, & 0 < \phi \leq \pi \end{cases}$.

Par définition, les coefficients de Fourier de $g(\cdot)$ sont donnés par $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)e^{-in\phi}\,d\phi$, et on a donc :

$$\lim_{N\to\infty}\left(S_N^f(x) - \frac{1}{2}\left(f\left(x_-\right) + f\left(x_+\right)\right)\right) = \lim_{N\to\infty}\left(C_{-(N+1)} - C_N\right)$$

Par application du Théorème de *Riemann-Lebesgue* à la fonction $g(\cdot)$, on obtient :

$$\lim_{N\to\pm\infty} C_N = 0.$$

CQFD □

(La dernière étape peut également être prouvée en utilisant l'*inégalité de Bessel* (introduite plus loin).)

Théorème de Riemann-Lebesgue

Théorème (Riemann-Lebesgue, sans démonstration)

Si $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur le fermé $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \to \pm\infty} \int_a^b g(\phi) e^{-in\phi} \, d\phi = 0.$$

Corollaire (Comportement des coefficients de Fourier à l'infini)

Les coefficients de Fourier d'une fonction périodique et intégrable au sens de Riemann tendent vers zéro à l'infini :

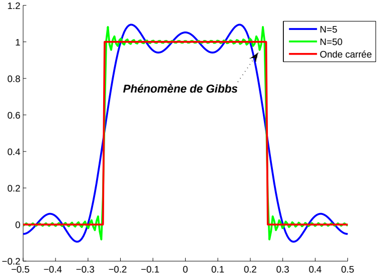
$$\lim_{n \to \pm\infty} c_n = 0.$$

Remarque : La fonction $g(\cdot)$ définie dans la démonstration du Théorrème de Dirichlet est bornée et continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ vu que $f(\cdot)$ est lisse par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que, en particulier

$$\begin{aligned} g\left(0_-\right) &= \lim_{\phi \to 0_-} \frac{f(x+\phi) - f\left(x_-\right)}{e^{i\phi} - 1} = \lim_{\phi \to 0_-} \frac{\frac{f(x+\phi) - f\left(x_-\right)}{\phi}}{\frac{e^{i\phi} - 1}{\phi}} = \frac{f'\left(x_-\right)}{i} \\ g\left(0_+\right) &= \cdots = \frac{f'\left(x_+\right)}{i} \end{aligned}$$

Phénomène de Gibbs

Bien que, sous les hypothèses du Théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $f(\cdot)$ converge ponctuellement vers $\frac{1}{2}\left(f\left(x_{-}\right)+f\left(x_{+}\right)\right)$ en tout point x, cela ne signifie pas que le graphe de $S_N^f(\cdot)$ converge vers celui de $f(\cdot)$ lorsque $N \to \infty$ (J. Willard Gibbs, *Nature*, 1899).



Ce phénomène est connu sous le nom de *phénomène de Gibbs* et se traduit par des oscillations du graphe de la somme partielle autour des points de discontinuité.

Amélioration de la convergence et réduction du phénomène de Gibbs

Plusieurs méthodes existent permettant d'améliorer la convergence de la série de Fourier et de réduire le phénomène de Gibbs. Parmi celles-ci, une en particulier mérite d'être mentionnée, celle des *sommes de Fejér* d'indice N (aussi appelées *moyennes de Cesàro*) : $\sigma_N^f(x) \triangleq \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} S_N^f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{N+1-|n|}{N+1} c_n e^{inx}$ pour lesquelles on a le théorème suivant :

Théorème (Fejér, 1900)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N^f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(x_-\right) + f\left(x_+\right)\right), \quad f\left(x_\pm\right) = \lim_{h\to 0,\, h>0} f(x \pm h)$$

pour tout x. En particulier, si $f(\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\sigma_N^f(\cdot)$ converge uniformément vers $f(\cdot)$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Voir [2, Chap. 2] ou [3, Théorème III.5.1]. $\square$

Convergence absolue et uniforme : définitions

Définition (Convergence ponctuelle)

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *conv. ponct.* sur un ensemble S *si et seulement si* $\forall x \in S : \lim_{N\to\infty} \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right) = 0$.

Définition (Convergence absolue)

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *conv. abs.* sur un ensemble S *si et seulement si* $\forall x \in S : \lim_{N\to\infty} \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)| \right) = 0$.

Définition (Convergence uniforme)

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *conv. unif.* sur un ensemble S *si et seulement si* $\lim_{N\to\infty} \left(\sup_{x\in S} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| \right) = 0$.

Définition (Convergence absolue et uniforme)

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *conv. abs. unif.* sur un ensemble S *si et seulement si* la série $\sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|$ converge unif. sur S, i.e., *si et seulement si* $\lim_{N\to\infty} \left(\sup_{x\in S} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)| \right| \right) = 0$.

Conv. abs. et unif. : test en M de Weierstrass

Théorème (Test en M de Weierstrass, sans démonstration)

La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est absolument et uniformément convergente sur un ensemble S si il existe une suite $M_n > 0, \forall n$ telle que

1. $$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in S$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$$

Dans le cas de la série de Fourier, on a :

$$\left|c_n e^{inx}\right| \leq |c_n|$$

L'application du test en M de Weierstrass révèle donc que la série $\lim_{N\to\infty} S_N^f(x)$ est absolument et uniformément convergente *si* la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ est convergente, i.e. si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Conv. abs. et unif. de la série de Fourier (1)

Afin d'établir un résultat de convergence abs. et unif. de la série de Fourier, nous avons besoin de deux résultats préliminaires :

Théorème (Inégalité de Bessel, Exercice 4)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* 2π*-périodique et intégrable (au sens de Riemann) sur* $[-\pi, \pi]$ *alors les coefficients de Fourier* $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in\psi}\, d\psi$ *respectent l'inégalité*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\phi)|^2\, d\phi$$

Théorème (Coefficients de Fourier de la dérivée, Exercice 5)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* 2π*-périodique, continue et lisse par morceaux, dont les coefficients de Fourier sont* c_n*. Les coefficients de Fourier* c_n' *de la dérivée* $f'(\cdot)$ *de* $f(\cdot)$ *sont donnés par* $c_n' = inc_n$*.*

Conv. abs. et unif. de la série de Fourier (2)

Théorème (Conv. abs. et unif. de la série de Fourier)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* 2π*-périodique, lisse par morceaux et continue sur* $\mathbb{R}$*, alors la série de Fourier de* $f(\cdot)$, $\lim_{N\to\infty} S_N^f(\cdot)$*, converge abs. et unif. vers* $f(\cdot)$*.*

Démonstration.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il suffit de montrer que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ est convergente. Les coefficients de Fourier c_n' de la dérivée $f'(\cdot)$ de $f(\cdot)$ sont donnés par $c_n' = inc_n$. Donc, pour $n \neq 0$, on a $c_n = \frac{1}{in} c_n'$.
L'inégalité de Bessel appliquée à la dérivée $f'(\cdot)$ donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| c_n' \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f'(\phi) \right|^2 d\phi < \infty$$

vu les hypothèses sur $f(\cdot)$. $\square$

Conv. abs. et unif. de la série de Fourier (3)

Démonstration.

Par application de l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on obtient donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} \left|\frac{c'_n}{n}\right| \leq |c_0| + \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\neq 0} \left|c'_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

vu que $\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

CQFD $\square$

Lectures complémentaires

- G. B. Folland. *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth & Brooks, 1992.
- T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
- A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1968.