Analyse et synthèse de petits réseaux de neurones dynamiques capables d'orchestrer la commande de plusieurs sous-systèmes identiques pour la réalisation de tâches coordonnées. Applications à la locomotion animale et aux robots jongleurs.

Introduction

Les oscillations non linéaires apparaissent dans une large variété de phénomènes physiques comme les réactions chimiques, les rythmes circadiens ou les potentiels d'action des cellules nerveuses pour ne citer que quelques exemples.

Depuis quelques années, l'étude qualitative des réseaux dynamiques d'oscillateurs fait l'objet de nombreux travaux. Ils sont notamment utilisés comme modèles d'équations aux dérivées partielles car plus simples à étudier tout en reproduisant les phénomènes spatio-temporels associés à celles-ci. Chaque sous-système isolé a un comportement simple (point d'équilibre ou cycle limite attractif) mais la dynamique du réseau peut être plus ou moins complexe selon la topologie ou l'organisation spatiale du réseau.

Dans le cadre des neurosciences, des oscillations non linéaires produites par des réseaux d'oscillateurs couplés sont à la base des tâches rythmiques associées à la marche, au jonglage ou à des mouvements répétés [2]. L'étude de ces tâches chez les êtres vivants a révélé l'existence de réseaux de neurones orchestrant de manière relativement autonome la coordination de ces sous-systèmes (générateur central de rythme ou CPG (central pattern generators)). Il apparaît donc raisonnable de s'inspirer de ces observations neurophysiologiques pour la réalisation de tâches similaires par des robots. Cette approche suggère de baser l'architecture de commande de tels robots sur un générateur de trajectoires jouant le rôle de chef d'orchestre entre les différents sous-systèmes. Le contrôle des oscillations produites par un tel réseau de neurones permettrait la réalisation des différentes tâches rythmiques.

La recherche ici présentée étudie des questions d'analyse et de synthèse de ces réseaux dynamiques, en particulier dans le cadre des applications robotiques évoquées plus haut. Il s'agira, entre autres, d'étudier la mise en oeuvre de générateurs de trajectoires à partir de la synthèse de réseaux de neurones dynamiques. Par réseaux de neurones dynamiques, on entend, ici, un ensemble d'équations différentielles composé de sous-systèmes identiques interconnectés en réseaux.

État des recherches

La recherche dans le domaine des réseaux d'oscillateurs interconnectés revêt deux aspects : l'analyse et la synthèse. L'analyse du comportement d'un seul oscillateur est bien connue dans la littérature. Cependant l'étude de l'interconnexion de plusieurs oscillateurs est nettement moins claire car la solution dépend alors de la structure spatio-temporelle des interconnexions. Les outils existant pour l'analyse d'un seul oscillateur se généralisent difficilement à l'étude de l'interconnexion et aucun outil général n'existe pour l'instant. Seuls quelques résultats partiels existent quant à l'analyse des réseaux d'oscillateurs couplés. De plus, les questions de synthèse ne sont pratiquement pas traitées dans la littérature. Une question classique de synthèse est par exemple : Quelle structure d'interconnexion choisir pour que les oscillateurs oscillent selon une certaine structure spatio-temporelle ? [5]

Différents outils qualitatifs existent dans la littérature pour l'**analyse** des cycles limites : méthode des fonctions descriptives, méthode du moyennage, théorème de HOPF, étude de l'application de premier retour (POINCARÉ map).

La méthode des *fonctions descriptives* [3, Chapter 10] est une méthode heuristique dont le principal objectif est la prédiction de l'existence d'une oscillation (d'un cycle limite) et la détermination des principales caractéristiques de celui-ci (amplitude et fréquence). Elle consiste à séparer le système non linéaire donné en une partie linéaire (décrite par sa fonction de transfert $G(s)$) et une partie non linéaire. Ensuite, sous l'hypothèse d'une sortie périodique (cycle limite), on remplace la partie non linéaire par une approximation de celle-ci basée sur une série de FOURIER tronquée au premier ordre. La fonction descriptive est une fonction de l'amplitude et de la fréquence du cycle limite qui décrit au premier ordre le comportement fréquentiel de la partie non linéaire du système.

La méthode du *moyennage* [3, Chapter 8] approxime la solution d'un système non autonome (sous la forme $\dot{x} = \epsilon f(x, t, \epsilon)$ avec f fonction périodique en t de période T) par celle d'un système moyenné (autonome) obtenu par moyennage temporel de $f(x, t, \epsilon)$ en $\epsilon = 0$. Cette méthode peut être utilisée pour prédire l'amplitude et la pulsation du cycle limite en particulier sous l'hypothèse de couplage faible entre les oscillateurs.

Récemment des *méthodes quantitatives* d'études de la stabilité de cycles limites ont été proposées dans la littérature [4]. Les recherches sont basées sur les méthodes numériques (en termes de LMI (Linear Matrix Inequalities)) d'étude de la stabilité asymptotique globale pour des systèmes linéaires par morceaux. L'idée consiste à démontrer la stabilité asymptotique globale en construisant des fonctions de LYAPUNOV quadratiques **sur** les surfaces de switch du plan de phase pour les POINCARÉ maps associées au système **linéaire par morceaux (PLS)** considéré.

Nos recherches ont débuté par une étude approfondie de ces différents résultats. Cependant, aucun d'entre eux ne se généralise facilement à l'étude d'une interconnexion d'oscillateurs. C'est en ce sens que le développement de nouvelles méthodes d'analyse reposant sur les propriétés entrée/sortie de chacun des oscillateurs est intéressante. Dans cette optique, il est naturel de s'intéresser à la passivité puisque cette propriété entrée/sortie est conservée par interconnexion feedback et joue un rôle très important dans l'analyse de stabilité de points d'équilibre pour des systèmes interconnectés.

Les recherches menées jusqu'à présent s'attachent donc à utiliser la propriété de passivité pour réaliser l'étude de stabilité d'un cycle limite généré par un oscillateur construit à partir d'un système passif.

Description du projet de recherche

Un défi majeur dans l'étude de réseaux d'oscillateurs consiste à déterminer l'architecture ainsi que la valeur des connexions permettant d'obtenir le motif d'oscillations désiré. De plus, afin d'assurer une bonne robustesse de la solution périodique, il s'agit de quantifier la taille de son bassin d'attraction. La synthèse d'un réseau dont le bassin d'attraction correspond à l'entièreté de l'espace de phase est désirable. Il s'agit dès lors de construire un réseau pour lequel on peut garantir la stabilité asymptotique globale du cycle limite correspondant à sa solution périodique.

La recherche s'oriente notamment vers les questions ouvertes suivantes :

- Si un réseau d'oscillateurs couplés possède une solution périodique, comment étudier et quantifier son bassin d'attraction ? Comment influencer le bassin d'attraction par le choix des couplages et/ou de la dynamique propre de chaque sous-système ?
- Si chaque sous-système est un oscillateur non linéaire, peut-on prescrire une architecture de réseau qui donne lieu à un motif spécifié de décalages de phase entre les différents oscillateurs (par exemple pour reproduire les différentes démarches animales) ?
- Peut-on munir ces réseaux d'une capacité d'apprentissage, inspirée de l'apprentissage classique des réseaux de neurones de type Hopfield ou machines de Boltzmann [1] ?

1. La passivité comme outil d'analyse de la stabilité des cycles limites

Soit un système correspondant à un simple intégrateur.

$$\dot{y} = u$$

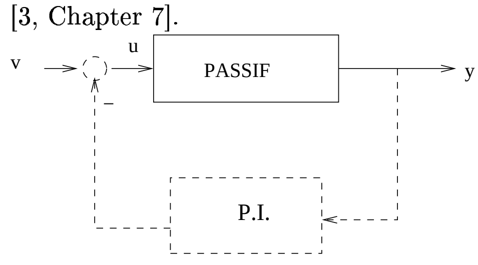
La manière la plus simple de transformer ce système en un système possédant un cycle limite est d'utiliser une loi de feedback du type PI (proportionnelle-intégrale) :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= y \\ u &= v - (k_i \xi + k_p(\xi)\dot{\xi}) \end{aligned}$$

avec $v = 0$.

De la sorte, nous obtenons l'équation de VAN DER POL $\ddot{\xi} + k_p(\xi)\dot{\xi} + k_i\xi = 0$ avec $k_p(\xi) = (\xi^2 - 1)k$ où k_i et k sont des constantes.

Comme cela a déjà été démontré dans la littérature, l'équation de VAN DER POL donne lieu à un cycle limite GAS (globalement asymptotiquement stable) [3, Chapter 7].



D'autre part, on peut démontrer que tout système passif est équivalent (par retour d'état et changement de coordonnées) à la dynamique entrée/sortie d'un intégrateur et possède une dynamique interne stable. Le comportement entrée/sortie du système passif étant identique à celui du simple intégrateur, il est raisonnable de penser qu'un cycle limite globalement asymptotiquement stable peut être obtenu en procédant de façon analogue au cas du simple intégrateur. La démonstration de ce résultat fait l'objet de nos recherches actuelles.

Motivation pour l'utilisation de la passivité

1. De nombreux résultats de stabilité de points d'équilibre reposent sur la propriété de passivité. Par contre, la conversion de ces résultats pour l'analyse de la stabilité de cycles limites est pratiquement inexistante dans la littérature.
2. Écrire l'interconnexion de plusieurs oscillateurs sous la forme d'un système MIMO (multi input, multi output) de dynamique similaire à celle de chaque oscillateur permettrait de généraliser les propriétés fondamentales des oscillateurs à l'ensemble du réseau.
3. La propriété de passivité apparaît naturellement dans les applications robotiques. De plus, un effort permanent des roboticiens lors de la synthèse des lois de commande est la construction de lois de contrôle préservant la propriété intrinsèque de passivité du système physique que constitue le robot [2].

2. Interconnexion de plusieurs oscillateurs globalement asymptotiquement stables

La suite de la recherche s'attachera à étudier l'interconnexion de plusieurs oscillateurs construit de la façon énoncée précédemment. Cette question sera traitée de deux points de vue.

1. **Analyse :** L'intérêt de poser le problème sous la forme d'une interconnexion d'oscillateurs GAS obtenus à partir de systèmes passifs serait de pouvoir réaliser l'étude de stabilité du système interconnecté en ne s'intéressant qu'aux propriétés entrée/sortie des oscillateurs le composant et à la structure d'interconnexion.
2. **Synthèse :** Le choix des connexions entre les oscillateurs du réseau doit être guidé par le souci de généraliser à l'entièreté du réseau les propriétés entrée/sortie des oscillateurs découplés et de pouvoir imposer un motif d'oscillation désiré aux sorties du réseau (par exemple un certain décalage de phase entre les différentes sorties) [6].

La synthèse de réseaux d'oscillateurs permettant d'imposer de manière robuste un motif d'oscillations prescrit n'est pratiquement pas traitée dans la littérature.

3. Apprentissage du réseau

De tels réseaux peuvent être utilisés dans des applications de robotique avancées dont l'architecture de commande est inspirée de la biologie. De telles applications pourraient être illustrées par l'implémentation d'un robot marcheur. En effet, dans ce cas, l'idée serait l'étude d'un réseau de neurones (unité appelée Central Pattern Generator ou CPG) chargé de la synchronisation des lois de commandes appliquées aux actionneurs connectés aux membres du robots. Le CPG, seul, servirait de générateur de trajectoires. Une unité d'apprentissage en interaction avec le CPG devrait permettre de corriger les incertitudes du modèle par un calcul off-line.

Références

[1] *Introduction to the theory of neural computation*, Lecture Notes Volume 1, J. Hertz, A. Krogh, R. G. Palmer, **Perseus Books**, 1991.

[2] *Robot Arm Control Exploiting Natural Dynamics*, M. M. Williamson, Ph. D. Thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, 1999.

[3] *Nonlinear Systems*, Second edition, Hassan K. Khalil, **Prentice Hall**, 1996.

[4] *Constructive Global Analysis of Hybrid Systems,* J. M. Gonçalvès, Ph. D. Thesis, MIT, 2000.

[5] *Patterns of oscillation in coupled cell systems*, M. Golubitsky, I. Stewart, Geometry, Dynamics, and Mechanics : 60th Birthday Volume for J.E. Marsden (P. Holmes, P. Newton, and A. Weinstein, eds.) Springer-Verlag. To appear.

[6] *Mécanismes neuronaux de la locomotion animale*, Travail de fin d'études, Fabien Defays, Université de Liège, 2000.